BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN	CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM **Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐÀO TẠO TRÌNH ĐỘ THẠC SĨ NĂM 2016

(Kỳ thi ngày 10, 11 tháng 9 năm 2016)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Môn thi: **GIẢI TÍCH**
Chuyên ngành: **TOÁN GIẢI TÍCH – ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ - PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
Thời gian làm bài: **180** (*không kể thời gian phát đề thi*)

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu trong khi làm bài thi)

Câu 1. (2 điểm) a) Khảo sát sự tồn tại và tính giới hạn sau (nếu có):

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$$

b) Khảo sát tính khả vi của hàm số sau tại điểm $(0,0)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{khi } \ x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{khi } \ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Câu 2. (2 điểm) Cho (X,d) là không gian mêtric. Với mỗi tập con khác rỗng A của X ta đặt

$$d(x,A):=\inf_{y\in A} d(x,y) \quad \forall x\in X.$$

Chứng minh rằng:
a) $d(x,A)=d(x,\overline{A})$. Đặc biệt, $d(x,A)=0 \ \Leftrightarrow \ x\in\overline{A}$;
b) $|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y)$ với mọi $x,y\in X$;
c) Trong trường hợp X là không gian định chuẩn (trên trường $\mathbb{K}$) thì với mọi $\lambda\in\mathbb{K}$, mọi $x,y\in X$, và mọi $A,B\subset X$ khác rỗng ta có

$$d(\lambda x,\lambda A)=|\lambda|d(x,A) \quad \text{và} \quad d(x+y,A+B)\leqslant d(x,A)+d(y,B).$$

Ngoài ra, nếu A là tập lồi thì hàm $f(x):=d(x,A)$ là hàm lồi.

Câu 3. (2 điểm) a) Cho f là hàm đo được không âm trên một tập hợp A có độ đo μ hữu hạn. Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, đặt $A_n=\{x\in A:\ n\leqslant f(x)\leqslant n+1\}$. Chứng minh rằng hàm f khả tích Lebesgue nếu và chỉ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n)$ hội tụ.
b) Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \sin x - x & \text{nếu } x \text{ vô tỷ},\\ 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ}.\end{cases}$$

Xét tính khả tích Riemann và khả tích Lebesgue của f trên $[0,1]$ và tính các tích phân này trong trường hợp tồn tại.

Câu 4. (4 điểm) Trên không gian vectơ $C^1[0,1]$ các hàm số khả vi liên tục trên $[0,1]$ xét ánh xạ $\|\cdot\|_1 : C^1[0,1]\to\mathbb{R}$ cho bởi $\|x\|_1:=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|$ với mọi $x\in C^1[0,1]$.
a) Chứng minh rằng $\|\cdot\|_1$ là một chuẩn trên $C^1[0,1]$ và $(C^1[0,1],\|\cdot\|_1)$ là không gian Banach.
b) Xét không gian định chuẩn $(C[0,1],\|\cdot\|)$ với $\|x\|=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$, $x\in C[0,1]$, và các ánh xạ $A, A_n : C^1[0,1]\to C[0,1]$ cho bởi

$$(Ax)(t)=x'(t)+e^t x(t), \quad (A_n x)(t)=x'(t)+\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}x(t) \quad \forall x\in C^1[0,1], t\in[0,1], n\geqslant 0.$$

Chứng minh rằng A và A_n là các toán tử tuyến tính liên tục. Tính $\|A\|$ và $\|A_n\|$.
c) Chứng minh rằng $\{A_n\}$ hội tụ theo chuẩn về A.

——————— HẾT ———————

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Phòng thi số:

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm