BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐÀO TẠO TRÌNH ĐỘ THẠC SĨ NĂM 2016

(Kỳ thi ngày 10, 11 tháng 9 năm 2016)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Môn thi: **ĐẠI SỐ**
Chuyên ngành: **ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ, TOÁN GIẢI TÍCH, PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
Thời gian làm bài: **180 phút** *(không kể thời gian phát đề thi)*

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu trong khi làm bài thi)

Câu 1 (**3 điểm**) Kí hiệu P_n là không gian véctơ các đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ có bậc $\leqslant n$. Gọi $\varphi : P_n \to P_n$ là ánh xạ xác định bởi

$$\varphi(f(x)) = xf'(x) \text{ với mọi } f(x) \in P_n,$$

trong đó $f'(x)$ là đạo hàm của $f(x)$.

(a) Chứng minh φ là một tự đồng cấu trên P_n. Xác định ma trận của φ đối với cơ sở chính tắc $1, x, x^2, \dots, x^n$ của P_n.

(b) Xác định $\dim \ker \varphi$ và $\dim \operatorname{Im} \varphi$.

(c) Cho $g(x) = x + 96x^2 + 1458x^3 \in P_n$. Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in P_n$ sao cho $\varphi^5(f) = g$.

(d) Chứng minh rằng tồn tại các hệ số $c_0, c_1, \dots, c_{n+1} \in \mathbb{R}$ với $c_{n+1} \neq 0$ sao cho

$$c_0x^n + c_1(x+1)^n + \cdots + c_{n+1}(x+n+1)^n = 0.$$

Câu 2 (**2 điểm**) Cho V, W, U là ba không gian véc tơ hữu hạn chiều, $f : V \to W$, $g : W \to U$ là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rank}(f), \operatorname{rank}(g)).$$

Đặc biệt, nếu f là một đẳng cấu thì $\operatorname{rank}(g \circ f) = \operatorname{rank}(g)$.

Câu 3 (**2 điểm**) Cho G là một nhóm. Với $x, y \in G$, kí hiệu $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ là giao hoán tử của x và y. Gọi H là nhóm con của G sinh bởi tất cả các giao hoán tử. Chứng minh

a) H là một nhóm con chuẩn tắc của G và G/H là abel.

b) H là nhóm con chuẩn tắc bé nhất của G sao cho G/H là abel.

Câu 4 (**1 điểm**) Chứng minh rằng trong vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ mọi iđêan nguyên tố khác không có dạng $p\mathbb{Z}$ với p là một số nguyên tố.

Câu 5 (**2 điểm**) Cho K là một trường con của một trường T. Xét vành đa thức $K[x]$ và giả sử $p(x)$ là một đa thức bất khả quy trên K nhận phần tử $\alpha \in T$ làm nghiệm. Chứng minh

a) Tập hợp $K(\alpha) = \{f(\alpha) \mid f(x) \in K[x]\}$ là trường con nhỏ nhất của T chứa K và α.

b) $K(\alpha) \cong K[x]/(p(x))$, trong đó $(p(x))$ là iđêan của $K[x]$ sinh bởi $p(x)$.

c) Nếu $\deg p(x) = n \geqslant 1$ thì $1, \alpha, \alpha^2, \dots \alpha^{n-1}$ là một cơ sở của không gian véctơ $K(\alpha)$ trên K.

d) Tồn tại một mở rộng trường L của K sao cho $p(x)$ có đủ n nghiệm trong L.

————————HẾT————————

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Phòng thi số:

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm